ENSA d'Al-Hoceima — Année 2020/2021
CP-II, 2ème année, — Semestre 3
Algèbre Quadratique, — TD4

Solutions de la Série N^{o}4 : Formes linéaires et Formes quaadratiques

Exercice 1

1. On désigne par S une matrice carrée symétrique à termes réels d'ordre n et par L une matrice colonne à n termes réels ; on suppose que la matrice S est inversible.
   On définit une application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ en posant pour toute matrice colonne X ayant n termes réels :
   $$f(X) = X^T SX + 2L^T X + \delta.$$
   (a) Montrer qu'il existe une matrice colonne unique U telle que le changement de variable : $X = U + Y$ transforme $f(X)$ en la somme d'une forme quadratique en Y et d'une constante.

   (b) En déduire qu'il existe une matrice orthogonale P telle que si :
   $$X = U + PZ$$
   et si $\xi_1, \dots, \xi_n$ sont les termes de Z :
   $$f(X) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \xi_i^2 + \varepsilon.$$
   (c) En considérant la forme quadratique F définie sur $\mathbb{R}^{n+1}$ par :
   $$F(X, \theta) = X^T SX + 2L^T X\theta + \delta\theta^2$$
   (X est la matrice des n premières coordonnées et θ la $(n+1)$-ième coordonnée d'un élément de $\mathbb{R}^{n+1}$), montrer que :
   $$\varepsilon = \frac{det\begin{pmatrix} S & L \\ L^T & \delta \end{pmatrix}}{det(S)}$$
2. On considère l'application φ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
   $$\varphi(X) = 3(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz = zx) - 4x - 4y + 4z,$$
   où x, y, z désignent les termes de la matrices colonne X.
   On sait qu'il existe une matrice colonne U et une matrice orthogonale P telles que si ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont les termes de la matrice colonne $Z = P^{-1}(X - U)$
   $$\varphi(X) = \sum_{i=1}^{3} \rho_i \xi_i^2 + \varepsilon.$$
   Déterminer les nombres ρ_i, ρ_2, ρ_3 et ε ; puis retruver la valeur de ε en déterminant la matrice U.

Solution :

1. Considérons une matrice carrée symétrique à termes réels S d'ordre n et L une matrice colonne à n termes réels; supposons que la matrice S est inversible.
   Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ en posant pour toute matrice colonne X ayant n termes réels :
$$f(X) = X^T SX + 2L^T X + \delta.$$
   (a) Montrons qu'il existe une matrice colonne unique U telle que le changement de variable : $X = U + Y$ transforme $f(X)$ en la somme d'une forme quadratique en Y et d'une constante : en effet, on pose $X = U + Y$, alors ce changement de variables implique
$$\begin{array}{rcl} f(U+Y) & = & (U+Y)^T S(U+Y) + 2L^T(U+Y) + \delta \\ & = & U^T SU + U^T SY + Y^T SU + Y^T SY + 2L^T U + 2L^T Y + \delta \\ & = & [U^T SU + 2L^T U + \delta] + U^T SY + Y^T SU + Y^T SY + 2L^T Y \\ & = & f(U) + U^T SY + Y^T SU + Y^T SY + 2L^T Y \end{array}$$
   comme le produit scalaire est symétrique et la matrice S est symétrique, alors on a $Y^T SU = (SU, Y) = (U, S^T Y) = (U, SY) = (SY, U) = U^T SY$; donc
$$f(U+Y) = f(U) + 2U^T SY + 2L^T Y + Y^T SY$$
   pour que $f(X)$ soit la somme d'une forme quadratique en Y et d'une constante, il faut que $2U^T SY + 2L^T Y = 0$; donc le vecteur U cherché est défini par
$$U^T SY + L^T Y = 0 \quad \Rightarrow \quad (SU, Y) = (-L, y) \quad \Rightarrow \quad U = -S^{-1}L$$
   avec cette valeur du vecteur U, on obtient
$$f(U+Y) = Y^T SY + f(S^{-1}L) \quad \text{où} \quad f(S^{-1}L) = \delta - L^T S^{-1} L = \varepsilon$$
   finalement $f(U+Y) = Y^T SY + \varepsilon$ où ε est une constante ne dépendant pas de Y.
   (b) La matrice S est réelle et symétrique, alors S est diagonalisable; donc il exisste une matrice orthogonale P formée de vecteurs propres normalisés et une matrice diagonale $D = \text{diag}(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ dont la diagonale est formée de valeurs propres $\rho_1, \ldots, \rho_n$ de la matrice S telle que $D = P^{-1}SP$. Soit $Z = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)^T \in \mathbb{R}^n$ un vecteur tel que $Y = PZ$, alors
$$Y^T SY = Z^T P^T SPZ = Z^T [P^{-1}SP] Z = Z^T DZ$$
   car $P^T P = I_n$ implique que $P^T = P^{-1}$. Evidement on a $X = U + Y$ et $Y = PZ$ alors $X = U + PZ$ et $Z^T DZ = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \zeta_i^2$; d'où le résultat de diagonalisation d'une forme quadratique
$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \xi_i^2 + \varepsilon.$$
   avec $\varepsilon = \delta - L^T S^{-1} L = \delta + L^T U$.
   (c) Considérons la forme quadratique F définie sur $\mathbb{R}^{n+1}$ par :
$$F(X, \theta) = X^T SX + 2L^T X\theta + \delta\theta^2$$
   (X est la matrice des n premières coordonnées et θ la $(n+1)$-ième coordonnée d'un élément de $\mathbb{R}^{n+1}$), montrons que :
$$\varepsilon = \frac{det \begin{pmatrix} S & L \\ L^T & \delta \end{pmatrix}}{det(S)}$$

On reconnaît aisément que le changement de variables de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par

$$\begin{pmatrix} X \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta U + PZ \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & U \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ \theta' \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} Z \\ \theta' \end{pmatrix}$$

se réduit pour X si $\theta = 1$ au changement de variables étudié et que :

$$F(X,\theta) = G(Z,\theta') = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \xi_i^2 + \varepsilon \theta'^2.$$

La matrice Λ de la forme quadratique G transformée de F par la matrice Q est :

$$\Lambda = Q^T \begin{pmatrix} S & L \\ L^T & \delta \end{pmatrix} Q.$$

Il en résulte que :

$$\det(\Lambda) = \varepsilon \prod_{i=1}^{n} \rho_i = \det(Q^T) \det \begin{pmatrix} S & L \\ L^T & \delta \end{pmatrix} \det(Q)$$

On a $\det(Q) = \det \begin{pmatrix} S & U \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det(P) = \pm 1$ puisque P est une matrice orthogonale et $\det(Q^T) = \det(Q)$, alors

$$\det(\Lambda) = \varepsilon \prod_{i=1}^{n} \rho_i = (\det(Q))^2 \det \begin{pmatrix} S & L \\ L^T & \delta \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} S & L \\ L^T & \delta \end{pmatrix}.$$

Comme $\rho_1, \ldots, \rho_n$ sont des valeurs propres de la matrice S, alors $\det(S) = \prod_{i=1}^{n} \rho_i$; par conséquence on obtient

$$\varepsilon \det(S) = \det \begin{pmatrix} S & L \\ L^T & \delta \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \varepsilon = \frac{det \begin{pmatrix} S & L \\ L^T & \delta \end{pmatrix}}{det(S)}.$$

2. Considère l'application φ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(X) = 3(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx) - 4x - 4y + 4z,$$

où x, y, z désignent les termes de la matrices colonne X.
On sait qu'il existe une matrice colonne U et une matrice orthogonale P telles que si ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont les termes de la matrice colonne $Z = P^{-1}(X - U)$

$$\varphi(X) = \sum_{i=1}^{3} \rho_i \xi_i^2 + \varepsilon.$$

– D'abord on écrit $\varphi(X)$ sous la forme réduite $\varphi(X) = X^T S X + 2L^T X + \delta$ où

$$S = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \delta = 0.$$

– Déterminons les nombres ρ_1, ρ_2, ρ_3 et ε : en effet, les nombres ρ_1, ρ_2 et ρ_3 sont les valeurs propres de la matrice S, alors ρ_1, ρ_2 et ρ_3 sont les racines du polynôme caractéristique de

S donné par $P_S(\lambda) = \det(S - \lambda I_3)$
on a

$$\begin{aligned}
\det(S-\lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 3-\lambda \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= (3-\lambda)((3-\lambda)^2-1) + (\lambda-4) + (\lambda-4) \\
&= (\lambda-4)(\lambda-3)(2-\lambda) + 2(\lambda-4)
\end{aligned}$$

d'où $P_S(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-4)^2$. D'où le spectre de S est $\mathrm{Sp}(S) = \{1; 4\}$ et on aura bien le déterminant de la matrice S : $\det(S) = \rho_1\rho_2\rho_3 = 1 * 4 * 4 = 16$.

– La valeur de ε en déterminant la matrice U : pour obtenir la valeur de ε, il suffit de calculer :

$$\det\begin{pmatrix} S & L \\ L^T & \delta \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -64,$$

ce qui donne

$$\varepsilon = \frac{det\begin{pmatrix} S & L \\ L^T & \delta \end{pmatrix}}{det(S)} = -\frac{64}{16} = -4.$$

Le vecteur U de coordonnées u, v et w est solution de l'équation

$$SU = -L \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3u - v - w = -2 \\ -u + 3v - w = -2 \\ -u - v + 3w = 2 \end{cases}$$

après la résolution de ce système d'équations linéaires, on obtient $u = 1$, $v = 1$ et $w = 0$; d'où $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Remarque : le terme constant ε de l'équation est comme nous l'avons vu

$$f(U) = 3(1+1+0) - 2(1+0+0) - 4 - 4 = -4.$$

On pourrait aussi utiliser la formule

$$\varepsilon = \delta + L^T U = 0 - 2 - 2 = -4.$$

$\square$

Exercice 2

On considère l'espace vectoriel E sur $\mathbb{C}$ des matrices colonnes X à termes complexes et on pose

$$\|X\|^2 = \bar{X}^T X.$$

On désigne par A une matrice carrée d'ordre n à termes complexes hermitienne, c'est-à-dire telle que $A^T = \bar{A}$ (on note $\bar{X}$ et $\bar{A}$ les matrices obtenues en remplaçant chaque terme de X ou de A par le nombre conjugué).

1. Montrer que si I est la matrice unité et α et β des nombres réels, alors :

$$\|(A - (\alpha + \mathrm{i}\beta)I)X\|^2 = \|(A - \alpha I)X\|^2 + \beta^2\|X\|^2$$

2. Retrouver ainsi que les valeurs propres de A sont réelles.

Solution : Considèrons E sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des matrices colonnes X à termes complexes. Posons $\|X\|^2 = \bar{X}^T X$. Désignons par A une matrice carrée d'ordre n à termes complexes hermitienne, c'est-à-dire telle que $A^T = \bar{A}$ (on note $\bar{X}$ et $\bar{A}$ les matrices obtenues en remplaçant chaque terme de X ou de A par le nombre conjugué).

1. Montrons que si I est la matrice unité et α et β des nombres réels, alors :
$$\|(A-(\alpha+\mathrm{i}\beta)I)X\|^2 = \|(A-\alpha I)X\|^2 + \beta^2\|X\|^2$$
en effet, soit I la matrice unité et α et β des nombres réels, on a
$$\begin{aligned}
\|(A-(\alpha+\mathrm{i}\beta)I)X\|^2 &= ((A-(\alpha+\mathrm{i}\beta)I)X, (A-(\alpha+\mathrm{i}\beta)I)X) \\
&= ((A-\alpha I)X + \mathrm{i}\beta X, (A-\alpha I)X + \mathrm{i}\beta X) \\
&= ((A-\alpha I)X, (A-\alpha I)X) + ((A-\alpha I)X, \mathrm{i}\beta X) \\
&\quad +(\mathrm{i}\beta X, (A-\alpha I)X) + (\mathrm{i}\beta X, \mathrm{i}\beta X) \\
&= \|(A-\alpha I)X\|^2 + \mathrm{i}\beta(X,(A-\alpha I)X) - \mathrm{i}\beta((A-\alpha I)X, X) + \|\mathrm{i}\beta X\|^2 \\
&= \|(A-\alpha I)X\|^2 + \mathrm{i}\beta[(X,(A-\alpha I)X) - ((A-\alpha I)X, X)] + \beta^2\|X\|^2
\end{aligned}$$
Comme A est hermitienne alors $((A-\alpha I)X, X) = (X, (A-\alpha I)X)$; donc
$$((A-\alpha I)X, X) - (X, (A-\alpha I)X) = 0,$$
d'où
$$\|(A-(\alpha+\mathrm{i}\beta)I)X\|^2 = \|(A-\alpha I)X\|^2 + \beta^2\|X\|^2$$

2. Les valeurs propres de A sont réelles : en effet, soit $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$ une valeur propre de A où α et β des nombres réels ; alors pour tout vecteur X dans $\mathbb{C}^n$ on a
$$\|(A-(\alpha+\mathrm{i}\beta)I)X\|^2 = \|(A-\alpha I)X\|^2 + \beta^2\|X\|^2$$
en particulier, pour X un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$, on a $(A-(\alpha+\mathrm{i}\beta)I)X = 0_{\mathbb{C}^n}$; donc
$$\|(A-\alpha I)X\|^2 + \beta^2\|X\|^2 = 0$$
or $\|(A-\alpha I)X\|^2 \geq 0$ et $\beta^2\|X\|^2 \geq 0$, alors $\|(A-\alpha I)X\|^2 = 0$ et $\beta^2\|X\|^2 = 0$; donc
$$(A-\alpha I)X = 0 \quad \text{et} \quad \beta^2\|X\|^2 = 0$$
comme X est un vecteur propre, alors $X \neq 0_{\mathbb{C}^n}$; donc $\|X\|^2 \neq 0$; d'où $\beta = 0$
finalement $(A-\alpha I)X = 0_{\mathbb{C}^n}$ et $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\,0 = \alpha \in \mathbb{R}$, c'est à dire que les valeurs propres d'une matrice hermitienne sont réelles.

□

Exercice 3

1. On considère un espace euclidien E et un sous-espace vectoriel F de E, ces espaces étant de dimension finie ou non.
   (a) On donne un vecteur x de E. En étudiant la distance de x au vecteur $x_0 + \lambda y$, montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que x_0 soit de tous les vecteurs de F un de ceux dont la distance à x est minimum est que $x - x_0$ soit orthogonal à tous les vecteurs de F.
   (b) Montrer qu'il ne peut exister deux vecteurs de F dont la distance à x soit minimum.

(c) Montrer que si F est de dimension finie, alors il existe effectivement un vecteur x_0 de F dont la distance à x est minimum.

2. (a) Montrer que dans l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions continues de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{R}$, on peut définir un produit scalaire en posant : $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$. Quelle est la norme associée à ce produit scalaire ? nous désignerons par E l'espace euclidien (de dimension infinie) ainsi obtenu.

   (b) Montrer que dans E, les fonctions 1, $\cos(kt)$ et $\sin(ht)$ (k et h étant des entiers naturels arbitraires) sont deux à deux orthogonales.

   (c) On prend pour F l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques d'ordre n (c'est-à-dire combinaisons linéaires de 1, $\cos(kt)$ et $\sin(ht)$, avec $k \geq n$ et $h \geq n$). Déterminer le polynôme Q dont la distance à une fonction f donnée est minimum.

Solution :

1. Considère un espace euclidien E et un sous-espace vectoriel F de E, ces espaces étant de dimension finie ou non.

   (a) Soit x un vecteur donné dans E. En étudiant la distance de x au vecteur $x_0 + \lambda y$, montrons que la condition nécessaire et suffisante pour que x_0 soit de tous les vecteurs de F un de ceux dont la distance à x est minimum est que $x - x_0$ soit orthogonal à tous les vecteurs de F, en effet, les règles de calcul du produit scalaire impliquent :

$$\begin{aligned}
\|x - (x_0 + \lambda y)\|^2 &= (x - (x_0 + \lambda y), x - (x_0 + \lambda y)) \\
&= (x - x_0 - \lambda y, x - x_0 - \lambda y) \\
&= (x - x_0, x - x_0) + (-\lambda y, -\lambda y) + (x - x_0, -\lambda y) + (-\lambda y, x - x_0) \\
&= \|x - x_0\|^2 + \lambda^2\|y\|^2 + (x - x_0, -\lambda y) + (-\lambda y, x - x_0) \\
&= \|x - x_0\|^2 + \lambda^2\|y\|^2 - 2\lambda(x - x_0, y)
\end{aligned}$$

   Si y est unnvecteur de F, alors cette distance doit être minimum pour $\lambda = 0$; le terme du premier degré dans le trinôme est nul, soit $(x - x_0, y) = 0$.

$$(x - x_0, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad y \text{ est orthogonal à } (x - x_0)$$

   (b) Montrons qu'il ne peut exister deux vecteurs de F dont la distance à x soit minimum : Supposons que $(x - x_0)$ est orthogonal à tot vecteur de F. Si x_1 est un vecteur de F, $x_0 - x_1$ est également un vecteur de F et :

$$\|x - x_1\|^2 = \|x - x_0 + x_0 - x_1\|^2 = \|x - x_0\|^2 + \|x_0 - x_1\|^2$$

   d'où

$$\|x - x_1\| > \|x - x_0\|.$$

   La dernière inégalité montre de plus que si $\|x - x_0\|$ est minimum et donc $(x - x_0)$ orthogonal à tout vecteur de F, alors il n'existe pas d'autre vecteur x_1 pour lequel la distance $\|x - x_1\|$ soit égale à $\|x - x_0\|$.

   (c) Supposons F est de dimension finie n, alors F admet une base orthonormale $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Soit x_0 un vecteur de F, alors

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$$

   Pour que $x - x_0$ soit orthogonal à tous les vecteurs de F, il faut et il suffit qu'il soit orthogonal aux vecteurs d'une base de F ; par exemple la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$.
   Les équations du problème sont donc :

$$(x - x_0, e_k) = 0 \quad \text{pour } k = 1, 2, \ldots, n$$

ou
$$(x, e_k) = (x_0, e_k) = \xi_k \quad \text{pour } k = 1, 2, \ldots, n$$
d'où $x_0 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_0, e_k)e_k$.

2. (a) – Soit $E = \mathrm{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions continues de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{R}$; on définit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$, $(f, g) \mapsto \varphi(f, g) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$.

   L'application φ est bilinéaire et symétrique car il s'agit des propriétés de l'intégrale, la commutativité du produit $f.g$ de deux fonctions) ; la forme quadratique associée (f, f) est positive :
$$\varphi(f, f) = \int_0^{2\pi} f(t)f(t)dt = \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \geq 0$$
   Il reste à montrer que φ est non dégénérée et pour cela, puisque φ est positive, que
$$\varphi(f, f) = (f, f) = 0 \quad \Rightarrow \quad f \equiv 0$$
   Supposons donc
$$(f, f) = \int_0^{2\pi} [f(t)]^2 dt = 0$$
   La fonction f^2 est continue et positive dans $[0, 2\pi]$, alors f^2 a une primitive G (nous poserons $G(0) = 0$) croissante dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. L'hypothèse
$$0 = \int_0^{2\pi} [f(t)]^2 dt = G(2\pi) - G(0) = G(2\pi)$$
   implique que la fonction G croissante dans $[0, 2\pi]$ et nulle aux deux extrémités de l'intervalle $[0, 2\pi]$ est constante ; d'où la dérivée f^2 de G est donc la fonction nulle.

   – E est un espace euclidien dont la norme est :
$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt}$$
   on peut même associer une distance, notée $d(f, g)$, à cette norme :
$$d(f, g) = \|f - g\|.$$
   Cet espace est de dimension infinie puisque les éléments 1, $\cos(kt)$ et $\sin(ht)$ sont indépendants. **On sait que des éléments non nuls deux à deux orthogonaux sont indépendants**.

(b) Soient k et h étant des entiers naturels arbitraires, montrons que dans E, les fonctions 1, $\cos(kt)$ et $\sin(ht)$ sont deux à deux orthogonales :
$$\begin{aligned}(1, \cos(kt)) &= \int_0^{2\pi} 1.\cos(kt)dt = \left[-\frac{1}{k}\sin(kt)\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{k}\left(\sin(0) - \sin(2k\pi)\right) = 0 \\ (1, \sin(ht)) &= \int_0^{2\pi} 1.\sin(ht)dt = \left[\frac{1}{h}\cos(ht)\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{h}\left(\cos(2h\pi) - \cos(0)\right) = 0\end{aligned}$$
On sait que $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x})$ et $\sin(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x})$, alors
$$\begin{aligned}\cos(kt).\sin(ht) &= \frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}kt} + e^{-\mathrm{i}kt})\frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}ht} - e^{-\mathrm{i}ht}) = \frac{1}{2}(\sin((k+h)t) - \sin((k-h)t)) \\ \cos(kt).\cos(ht) &= \frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}kt} + e^{-\mathrm{i}kt})\frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}ht} + e^{-\mathrm{i}ht}) = \frac{1}{2}(\cos((k+h)t) - \cos((k-h)t)) \\ \sin(kt).\sin(ht) &= \frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}kt} - e^{-\mathrm{i}kt})\frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}ht} - e^{-\mathrm{i}ht}) = \frac{1}{2}(\cos((k-h)t) - \cos((k+h)t))\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
(\cos(kt), \sin(ht)) &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\sin((k+h)t) - \sin((k-h)t)]\, dt = 0 \\
(\cos(kt), \cos(ht)) &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\cos((k+h)t) - \cos((k-h)t)]\, dt = 0 \quad \text{si} \quad k \neq h \\
(\sin(kt), \sin(ht)) &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\cos((k-h)t) - \cos((k+h)t)]\, dt = 0 \quad \text{si} \quad k \neq h
\end{aligned}$$

Enfin, nous calculerons les normes de ces fonctions :

$$\begin{aligned}
(1, 1) &= \int_0^{2\pi} 1.1dt = 2\pi, \\
(\cos(kt), \cos(kt)) &= \int_0^{2\pi} \cos^2(kt)dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos(2kt))dt = \pi, \\
(\sin(ht), \sin(ht)) &= \int_0^{2\pi} \sin^2(ht)dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos(2ht))dt = \pi,
\end{aligned}$$

donc $\|1\| = \sqrt{2\pi}$, $\|\cos(kt)\| = \sqrt{\pi}$ et $\|\sin(ht)\| = \sqrt{\pi}$.
d'où on en déduit que les fonctions 1, $\cos(kt)$ et $\sin(ht)$ sont deux à deux orthogonales. Or, on sait que des éléments non nuls deux à deux orthogonaux sont indépendants, on conclut que les fonctions 1, $\cos(kt)$ et $\sin(ht)$ sont linéairements indépendantes.

(c) Soit F l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques d'ordre n (c'est-à-dire combinaisons linéaires de 1, $\cos(kt)$ et $\sin(ht)$, avec $k \geq n$ et $h \geq n$). Déterminons le polynôme Q dont la distance à une fonction f donnée est minimum :

– Construction d'une base de F : on remarque qu'on peut considérer une base orthonormale de l'espace F constituée des $2n+1$ fonctions e_k définies par :

$$e_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad e_{2k} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kt) \ \ (1 \leq k \leq n) \quad \text{et} \quad e_{2h-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(ht) \ \ (1 \leq h \leq n).$$

Posons alors :

$$f_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{\cos(kt)}{\sqrt{\pi}} + \sum_{k=1}^{n} \beta_h \frac{\sin(ht)}{\sqrt{\pi}}$$

Les coefficients α_k et β_h sont définis par

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= (f, e_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} f(t)dt \\
\alpha_k &= (f, e_{2k}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)dt \\
\beta_k &= (f, e_{2h-1}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(ht)dt
\end{aligned}$$

– le polynôme Q dont la distance à une fonction f donnée est minimum est donné par

$$\begin{aligned}
Q(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)dt\right)\cos(kt) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(ht)dt\right)\sin(ht)
\end{aligned}$$

– le polynôme trigonométrique Q ainsi déterminé est de tous les polynômes d'ordre n celui pour lequel la distance $\|f - f_0\|$ est minimum ; cette distance s'appelle l'**écart quadratique moyen**. On vérifie aisément que :

$$\|f\|^2 = \|f_0 + (f - f_0)\|^2 = \|f_0\|^2 + \|f - f_0\|^2$$

d'où

$$\|f - f_0\|^2 = \|f\|^2 - \|f_0\|^2 = \int_0^{2\pi} f^2(t)dt - \alpha_0^2 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 - \sum_{h=1}^{n} \beta_h^2.$$

Remarque : on remarque que si $f = f_0$, alors $\|f - f_0\|^2 = 0$; d'où la relation suivante **dite de Parceval**

$$\int_0^{2\pi} f^2(t)dt = \alpha_0^2 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 + \sum_{h=1}^{n} \beta_h^2.$$

□

Exercice 4

1. Soit E l'espace vectoriel réel dont les éléments sont les fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ et indéfiniment dérivables.
   (a) Montrer que les applications $f \mapsto f(0)$, $f \mapsto f''(1)$ et $f \mapsto \int_0^1 f(t)dt$ de E dans $\mathbb{R}$ sont des formes linéaires sur E.
   (b) Montrer que les applications $f \mapsto f(0) + 1$ et $f \mapsto (f'(2))^2$ ne sont pas des formes linéaires.
2. Montrer que les applications $f : (x, y, z) \mapsto x + 2y + 3z$ et $g : (x, y, z) \mapsto x - 2y + 3z$ sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$, et qu'elles sont linéairement indépendantes.
3. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $((x, y, z), (x', y', z')) \mapsto xx' + yz'$ est une forme bilinéaire dégénérée. Trouver les noyaux des deux homomorphismes associés canoniquement à f. Déterminer le rang de l'application bilinéaire f.

Solution :

1. Soit E l'espace vectoriel réel dont les éléments sont les fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ et indéfiniment dérivables.
   (a) Montrons que les applications $f \mapsto f(0)$, $f \mapsto f''(1)$ et $f \mapsto \int_0^1 f(t)dt$ de E dans $\mathbb{R}$ sont des formes linéaires sur E :
   – Soit $\phi_1 : f \in E \mapsto \phi_1(f) = f(0)$, alors ϕ_1 est une forme sur E car $f(0) \in \mathbb{R}$ puisque E est l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ et indéfiniment dérivables. Il reste donc à montrer que ϕ_1 est linéaire, soient f et g dans E et α et β des réels.

$$\begin{aligned} \phi_1(\alpha f + \beta g) &= (\alpha f + \beta g)(0) \\ &= \alpha f(0) + \beta g(0) \end{aligned}$$

   d'où $\phi_1(\alpha f + \beta g) = \alpha\phi_1(f) + \beta\phi_1(g)$, soit ϕ_1 est une forme linéaire sur E.
   – Soit $\phi_2 : f \in E \mapsto \phi_2(f) = f''(1)$, alors ϕ_2 est une forme sur E car $f''(1) \in \mathbb{R}$ puisque E est l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ et indéfiniment dérivables. Il reste donc à montrer que ϕ_2 est linéaire, soient f et g dans E et α et β des réels.

$$\begin{aligned} \phi_2(\alpha f + \beta g) &= (\alpha f + \beta g)''(1) \\ &= \alpha f''(1) + \beta g''(1) \end{aligned}$$

   d'où $\phi_2(\alpha f + \beta g) = \alpha\phi_2(f) + \beta\phi_2(g)$, soit ϕ_2 est une forme linéaire sur E.

- Soit $\phi_3 : f \in E \mapsto \phi_3(f) = \int_0^1 f(t)dt$, comme f est une fonction dérivable sur $[0;1]$, alors f est continue sur l'intervalle $[0;1]$ qui est borné, donc f est intégrable sur $[0;1]$; donc $\int_0^1 f(t)dt \in \mathbb{R}$ d'où ϕ_3 est une forme sur E. Il reste donc à montrer que ϕ_3 est linéaire, soient f et g dans E et α et β des réels.

$$\phi_3(\alpha f + \beta g) = \int_0^1 (\alpha f + \beta g)(t)dt = \int_0^1 (\alpha f(t) + \beta g(t))dt$$

comme le signe intégrale est linéaire, alors

$$\phi_3(\alpha f + \beta g) = \alpha \int_0^1 f(t)dt + \beta \int_0^1 g(t)dt,$$

d'où $\phi_3(\alpha f + \beta g) = \alpha\phi_3(f) + \beta\phi_3(g)$, soit ϕ_3 est une forme linéaire sur E.

(b) Montrons que les applications $f \mapsto f(0) + 1$ et $f \mapsto (f'(2))^2$ ne sont pas des formes linéaires : en effet,

- Soit $\phi_4 : f \in E \mapsto \phi_4(f) = f(0) + 1$, alors ϕ_4 est une forme sur E car $f(0) + 1 \in \mathbb{R}$ puisque E est l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ et indéfiniment dérivables. Il reste à voir que ϕ_4 est linéaire où non-linéaire, soient f et g dans E et α et β des réels.

$$\phi_4(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)(0) + 1 = \alpha f(0) + \beta g(0) + 1$$

d'où $\phi_4(\alpha f + \beta g) \neq \alpha\phi_4(f) + \beta\phi_4(g)$, soit ϕ_4 est une forme sur E mais ϕ_4 n'est pas linéaire.

- Soit $\phi_5 : f \in E \mapsto \phi_5(f) = (f'(2))^2$, alors ϕ_5 est une forme sur E car $(f'(2))^2 \in \mathbb{R}$ puisque E est l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ et indéfiniment dérivables. Il reste à voir que ϕ_5 est linéaire où non-linéaire, soient f et g dans E et α et β des réels.

$$\phi_5(\alpha f + \beta g) = ((\alpha f' + \beta g')(2))^2 = \alpha^2(f'(2))^2 + \beta^2(g'(2))^2 + 2\alpha\beta f'(2)g'(2)$$

d'où $\phi_5(\alpha f + \beta g) \neq \alpha\phi_5(f) + \beta\phi_5(g)$, soit ϕ_5 est une forme sur E mais ϕ_5 n'est pas linéaire.

2. – Montrons que les applications $f : (x,y,z) \mapsto x + 2y + 3z$ et $g : (x,y,z) \mapsto x - 2y + 3z$ sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$: en effet, soient $X = (x,y,z)$ et $Y = (x',y',z')$ dans $\mathbb{R}^3$ et α et β dans $\mathbb{R}$, on a

$$\alpha\, X + \beta\, Y = \alpha\,(x,y,z) + \beta\,(x',y',z') = (\alpha\, x + \beta\, x', \alpha\, y + \beta\, y', \alpha\, z + \beta\, z')$$

et

$$\begin{aligned} f(\alpha\, X + \beta\, Y) &= f(\alpha\, x + \beta\, x', \alpha\, y + \beta\, y', \alpha\, z + \beta\, z') \\ &= (\alpha\, x + \beta\, x') + 2(\alpha\, y + \beta\, y') + 3(\alpha\, z + \beta\, z') \\ &= (\alpha\, x + 2\alpha\, y + 3\alpha\, z) + (\beta\, x' + 2\beta\, y' + 3\beta\, z') \\ &= \alpha(x + 2\, y + 3\, z) + \beta(x' + 2\, y' + 3\, z') \end{aligned}$$

d'où $f(\alpha\, X + \beta\, Y) = \alpha\, f(X) + \beta\, f(Y)$; ce qui prouve que f est linéaire.
Pour tout $X = (x,y,z)$ dans $\mathbb{R}^3$, alors $x + 2\, y + 3\, z \in \mathbb{R}$; donc $f(x,y,z) \in \mathbb{R}$ Pour tout $X = (x,y,z)$ dans $\mathbb{R}^3$; d'où f est une forme sur $\mathbb{R}^3$. Finalement, f est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$.
De même pour g, on a

$$\begin{aligned} g(\alpha\, X + \beta\, Y) &= g(\alpha\, x + \beta\, x', \alpha\, y + \beta\, y', \alpha\, z + \beta\, z') \\ &= (\alpha\, x + \beta\, x') - 2(\alpha\, y + \beta\, y') + 3(\alpha\, z + \beta\, z') \\ &= (\alpha\, x - 2\alpha\, y + 3\alpha\, z) + (\beta\, x' - 2\beta\, y' + 3\beta\, z') \\ &= \alpha(x - 2\, y + 3\, z) + \beta(x' - 2\, y' + 3\, z') \end{aligned}$$

d'où $g(\alpha\, X + \beta\, Y) = \alpha\, g(X) + \beta\, g(Y)$; ce qui prouve que g est linéaire.
Pour tout $X = (x, y, z)$ dans $\mathbb{R}^3$, alors $x - 2\,y + 3\,z \in \mathbb{R}$; donc $g(x, y, z) \in \mathbb{R}$ Pour tout $X = (x, y, z)$ dans $\mathbb{R}^3$; d'où g est une forme sur $\mathbb{R}^3$. Finalement, g est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$.

– Montrons qu'elles sont linéairement indépendantes : en effet, soient α et β dans $\mathbb{R}$ tels que $\alpha\, f + \beta\, g = 0$, montrons que $\alpha = \beta = 0$.
Pour tout $X = (x, y, z)$ dans $\mathbb{R}^3$, on a $\alpha\, f(x, y, z) + \beta\, g(x, y, z) = 0$; alors

$$\begin{aligned} \alpha\, f(x, y, z) + \beta\, g(x, y, z) &= \alpha(x + 2\,y + 3\,z) + \beta(x - 2\,y + 3\,z) \\ &= x(\alpha + \beta) + y(2\alpha - 2\beta) + z(3\alpha + 3\beta) \end{aligned}$$

donc $x(\alpha + \beta) + y(2\alpha - 2\beta) + z(3\alpha + 3\beta) = 0$; et comme $\{x; y; z\}$ est libre, alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha - 2\beta = 0 \\ 3\alpha + 3\beta = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \beta \\ 2\,\alpha = 0 \\ 2\,\beta = 0 \end{array} \right.$$

d'où $\alpha = \beta = 0$; finalement le système $\{f; g\}$ est libre, soit f et g sont linéairement indépendantes.

3. – Montrons que l'application $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $((x, y, z), (x', y', z')) \mapsto xx' + yz'$ est une forme bilinéaire dégénérée : en effet, Pour tous $X = (x, y, z)$ et $Y = (x', y', z')$ dans $\mathbb{R}^3$, on a $xx' + yz' \in \mathbb{R}$; donc $f((x, y, z), (x', y', z')) \in \mathbb{R}$; ce qui prouve que f est une forme sur $\mathbb{R}^3$. Il reste à montrer que f est linéaire sur $\mathbb{R}^3$.
Soient $X = (x, y, z)$, $Y = (x', y', z')$ et $Z = (x'', y'', z'')$ dans $\mathbb{R}^3$ et α et β dans $\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(\alpha\, X + \beta\, Y, Z) &= f((\alpha\, x + \beta\, x', \alpha\, y + \beta\, y', \alpha\, z + \beta\, z'), (x'', y'', z'')) \\ &= (\alpha\, x + \beta\, x')x'' + (\alpha\, y + \beta\, y')z'' \\ &= \alpha(xx'' + yz'') + \beta(x'x'' + y'z'') \end{aligned}$$

donc $f(\alpha\, X + \beta\, Y, Z) = \alpha f(X, Z) + \beta f(Y, Z)$; d'où f est linéaire par rapport à la première variable. De même, on prouve la linéarité de f par rapport à la deuxième variable,

$$\begin{aligned} f(X, \alpha\, Y + \beta\, Z) &= f((x, y, z), (\alpha\, x' + \beta\, x'', \alpha\, y' + \beta\, y'', \alpha\, z' + \beta\, z''),) \\ &= x(\alpha\, x' + \beta\, x'') + y(\alpha\, z' + \beta\, z'') \\ &= \alpha(xx' + yz') + \beta(xx'' + yz'') \end{aligned}$$

donc $f(X, \alpha\, Y + \beta\, Z) = \alpha f(X, Y) + \beta f(X, Z)$; d'où f est linéaire par rapport à la deuxième variable. Par conséquent, f est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$.
La matrice A associée à f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est de coefficient générateur $a_{ij} = f(e_i, e_j)$ pour tout $1 \leq i \leq 3$ et $1 \leq j \leq 3$; alors $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{13} = 0$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = 0$, $a_{23} = 1$, $a_{31} = 0$, $a_{32} = 0$ et $a_{33} = 0$; donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

comme $\det(A) = 0$, alors f est dégénérée ; finalement, f est une forme bilinéaire dégénérée.

– Les noyaux des deux homomorphismes associés canoniquement à f : soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ et $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ les homorphismes associés canoniquement à f et vérifient

$$f(X, Y) = (u(X), Y) \quad \text{et} \quad f(X, Y) = (X, v(Y)) \quad \forall (X, Y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

où $X = (x, y, z)$ et $Y = (x', y', z')$.
On a

$$f(X, Y) = xx' + yz' = \left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right) = (u(X), Y)$$

donc $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto u(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \end{pmatrix}$ est le premier homorphisme associé canoniquement à f. De même, On a

$$f(X,Y) = xx' + yz' = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ z' \\ 0 \end{pmatrix} \right) = (X, v(Y))$$

d'où $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto v(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$ est le deuxième homorphisme associé canoniquement à f.

– On a $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto u(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \end{pmatrix}$ et $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto v(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$, alors $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u))$ où $\mathrm{Im}(u) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \end{pmatrix} : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$, donc pour tout $X \in \mathrm{Im}(u)$, alors $X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \end{pmatrix}$, donc

$$X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = xe_1 + ye_3$$

d'où $\mathrm{Im}(u) = \overline{\{e_1; e_3\}}$ est le sous-espace vectoriel engendré par le système $\{e_1; e_3\}$; ce qui prouve que $\dim(\mathrm{Im}(u)) = 2$; finalement $\mathrm{rg}(f) = 2$.
Remarque : De la même façon, on peut voir aussi que $\mathrm{Im}(v) = \overline{\{e_1; e_2\}}$ est le sous-espace vectoriel engendré par le système $\{e_1; e_2\}$, d'où $\dim(\mathrm{Im}(v)) = 2$, soit $\mathrm{rg}(f) = 2 = \dim(\mathrm{Im}(v))$.

□

Exercice 5
Soit $E = \mathbb{R}[x]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômiale en x. Pour tout polynôme P, soit f_P l'application sur E qui associe, à tout polynôme Q, le nombre

$$f_P(Q) = \int_0^1 P(x)Q'(x)dx + \int_0^1 P'(x)Q(x)dx.$$

1. Montrer que f_P est une forme linéaire sur E.
2. Trouver les polynômes P de degré 3 tels que f_P soit orthogonale aux polynômes 1, $x+1$ et x^2+2.

Solution : Considérons $E = \mathbb{R}[x]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômiale en x. Pour tout polynôme P, on définit f_P l'application sur E qui associe, à tout polynôme Q, le nombre

$$f_P(Q) = \int_0^1 P(x)Q'(x)dx + \int_0^1 P'(x)Q(x)dx.$$

1. Montrons que f_P est une forme linéaire sur E : comme $x \mapsto P(x)Q'(x)$ et $x \mapsto P'(x)Q(x)$ sont continues sur l'intervalle $(0;1]$, alors $\int_0^1 P(x)Q'(x)dx \in \mathbb{R}$ et $\int_0^1 P'(x)Q(x)dx \in \mathbb{R}$; donc $f_P(Q) \in\in \mathbb{R}$ pour tout $Q \in \mathbb{R}[x]$; ce qui prouve que f_P est une forme sur $E = \mathbb{R}[x]$.

Soient α et β deux réels et Q_1 et Q_2 deux éléments dans $E = \mathbb{R}[x]$, on a

$$\begin{aligned}
f_P(\alpha Q_1 + \beta Q_2) &= \int_0^1 P(x)(\alpha Q_1 + \beta Q_2)'(x)dx + \int_0^1 P'(x)(\alpha Q_1 + \beta Q_2)(x)dx \\
&= \int_0^1 P(x)(\alpha Q_1'(x) + \beta Q_2'(x))dx + \int_0^1 P'(x)(\alpha Q_1(x) + \beta Q_2(x))dx \\
&= \alpha \int_0^1 P(x)Q_1'(x)dx + \alpha \int_0^1 P'(x)Q_1(x)dx \\
&\quad + \beta \int_0^1 P(x)Q_2'(x)dx + \beta \int_0^1 P'(x)Q_2(x)dx \\
&= \alpha \left(\int_0^1 P(x)Q_1'(x)dx + \int_0^1 P'(x)Q_1(x)dx \right) \\
&\quad + \beta \left(\int_0^1 P(x)Q_2'(x)dx + \int_0^1 P'(x)Q_2(x)dx \right)
\end{aligned}$$

d'où $f_P(\alpha Q_1 + \beta Q_2) = \alpha\, f_P(Q_1) + \beta\, f_P(Q_2)$; ce qui prouve que f_P est une forme linéaire.

2. Les polynômes P de degré 3 tels que f_P soit orthogonale aux polynômes 1, $x+1$ et x^2+2 : en effet, soit $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ vérifiant les trois équations suivantes

$$\begin{cases} f_p(1) = (f_P, 1) = 0 \\ f_p(x+1) = (f_P, x+1) = 0 \\ f_p(x^2+2) = (f_P, x^2+2) = 0 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 (b + 2cx + 3dx^2)dx = 0 \\ \displaystyle\int_0^1 (a + bx + cx^2 + dx^3)dx + \int_0^1 (b + 2cx + 3dx^2)(x+1)dx = 0 \\ \displaystyle\int_0^1 2x(a + bx + cx^2 + dx^3)dx + \int_0^1 (b + 2cx + 3dx^2)(x^2+2)dx = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b + c + d = 0 \\ a + 2b + 2c + 2d = 0 \\ a + 3b + 3c + 3d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -c - d \\ a - 2c - 2d + 2c + 2d = 0 \\ a - 3c - 3d3c + 3d = 0 \end{cases}$$

d'où $a = 0$ et $b = -c - d$; soit $P(x) = -(c+d)x + c\,x^2 + d\,x^3$.
Soit $F = \overline{\{1; x+1; x^2+2\}}$ le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{B} = \{1; x+1; x^2+2\}$; alors l'orthogonale de F est le sous-espace vectoriel $F^\perp = \{-(c+d)x + c\,x^2 + d\,x^3 \;:\; (c,d) \in \mathbb{R}^2\}$ des polynômes $P = -(c+d)X + c\,X^2 + d\,X^3$ où $(c,d) \in \mathbb{R}^2$.
Soit $P \in F^\perp$, alors il existe α et β dans $\mathbb{R}$ tels que

$$P = -(\alpha + \beta)x + \alpha\,x^2 + \beta\,x^3 = \alpha(x^2 - x) + \beta(x^3 - x)$$

d'où $F^\perp$ est le sous-espace vectoriel en gendré par le système $\mathcal{B}' = \{x^2 - x; x^3 - x\}$; finalement, on peut conclure que la dimension de $F^\perp$ est 2.

$\square$